中学生标准学术能力诊断性测试2018年12月测试

理科数学试卷（一卷）

本试卷共150分，考试时间120分钟。

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知函数$f(x)=\ln(a-3x)$的定义域为A，若$4\in A$，$5\notin A$，则a的取值范围是（　　）

A.（12,15）　　B. [12,15）　　C.（12,15]　　D. [12,15]

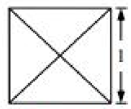
2．已知变量x,y 满足约束条件$\begin{cases}x-y\le 0\\2x-y\ge 0\\x+y-6\le 0\end{cases}$，则$z=\dfrac{x+2y+2}{x+1}$的取值范围是（　　）

A. $[2,4]$　　B. $[\dfrac{11}{4},4]$　　C. $[3,5]$　　D. $[\dfrac{3}{2},\dfrac{5}{2}]$

3．已知某几何体的俯视图是如图所示的边长为1的正方形，正视图与侧视图都是边长为1的正三角形，则此几何体的体积是（　　）

A. $\dfrac{1}{3}$　　B. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$



（第3题图）

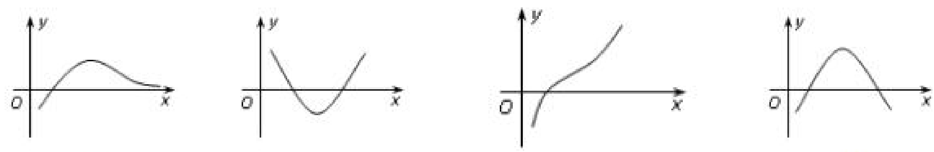
4．直线l过抛物线$y^2=2px(p>0)$的焦点F，与该抛物线及其准线依次交于A、B、C三点（其中B在A、C之间），若$|BC|=3|BF|$，$|AF|=3$，则$p=$（　　）

A. 2　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 3　　D. 4

5．定义$\prod\limits_{k=1}^{n}a_k=a_1a_2a_3\cdots a_n$，若$\prod\limits_{k=1}^{2019}[1+(2k-1)x]$展开式中$x$一次项的系数为$m$，则$i^m$等于（$i$为虚数单位）（　　）

A. $-i$　　B. i　　C. 1　　D. -1

6．函数$f(x)=\dfrac{\ln x^2}{\sqrt{x}}$的大致图象是（　　）



A　　B　　C　　D

7. 已知正项等比数列$\{a_n\}$的公比不为1，T_n为其前n项积，若$T_3=T_7$，则$\dfrac{\ln a_5}{\ln a_3}=$（　　）

A．$5:3$　　B．$3:5$　　C．$5:1$　　D．$1:5$

8. 在$\triangle ABC$中，A,B,C的对边分别是a,b,c．若$A=120°$，$a=1$，则$2b+3c$的最大值为（　　）

A．3　　B．$\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$　　C．$3\sqrt{2}$　　D．$\dfrac{3\sqrt{5}}{2}$

9. 已知$a>b>0$，有下列命题：

①若$\sqrt{a}-\sqrt{b}=1$，则$a-b<1$；　②若$a^2-b^2=1$，则$a-b<1$；

③若$a^3-b^3=1$，则$a-b<1$；　④若$a^4-b^4=1$，则$a-b<1$；

其中真命题的个数为（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

10. 已知圆锥的侧面展开图是一个半径为R，圆心角为$\sqrt{2}\pi$的扇形，圆锥内接圆柱的全面积与圆锥的侧面积相等，则圆柱的高为（　　）

A．$\dfrac{1}{2}R$　　B．$\dfrac{2}{3}R$　　C．$\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}R$　　D．$\dfrac{\sqrt{3}-1}{3}R$

11. 椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右顶点为$A$，下顶点为$B$，左焦点为$F$，若$\triangle ABF$外接圆的圆心在直线$y=x$的右下方，则此椭圆的离心率的取值范围是（　　）

A．$(\dfrac{1}{2},1)$　　B．$(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2})$　　C．$(0,\dfrac{1}{2})$　　D．$(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1)$

12. 已知函数$f(x)=|x-a|-\dfrac{3}{x}+a\ (a\in\mathbf{R})$，若方程$f(x)=2$有且只有三个不同的实数根，则$a$的取值范围是（　　）

A．$(1+\sqrt{3},3)$　　B．$(-1,1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3},+\infty)$

C．$(-\infty,1-\sqrt{3})$　　D．$(-\infty,1-\sqrt{3})\cup(1+\sqrt{3},3)$

二、填空题：本大题共4小题，每小题5分，共20分．

13. 若函数$f(x)=\log_3|ax+1|$图象的对称轴是$x=2$，则非零实数a的值为__________．

14. 已知$A(1,1)$，$B(0,1)$，$C(1,0)$，M为线段BC上一点，且$\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CB}$，若$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}\geq\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC}$，则实数$\lambda$的取值范围是__________．

15. 设F_1、F_2是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左右焦点，$M$是双曲线上任意一点，过$F_1$作$\angle F_1MF_2$平分线的垂线，垂足为$Q$，则点$Q$的轨迹方程是__________.

16. 若对任意的$x\in D$，均有$g(x)\le f(x)\le h(x)$成立，则称函数$f(x)$为函数$g(x)$和函数$h(x)$在区间D上的“M函数”．已知函数$f(x)=(k-1)x-1$，$g(x)=-3$，$h(x)=(x+1)\ln x$，且$f(x)$是$g(x)$和$h(x)$在区间$[1,2]$上的“M函数”，则实数k的取值范围是__________.

三、解答题：共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答．第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答．

（一）必考题：60 分．

17.（12分）已知函数$f(x)=4\sin x\sin(x+\frac{\pi}{6})-\sqrt{3}$．

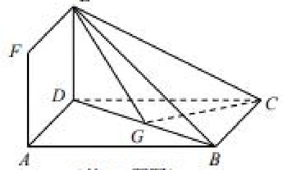
（I）求$f(x)$的最小正周期；

（II）在锐角△ABC中，a，b，c分别为角A，B，C的对边，且满足$a\sin B+b\cos 2A=b\cos A$，求$f(B)$的取值范围．

18.（12分）如图，正方形$ADEF$与▱$ABCD$所在的平面互相垂直，且$AB=2AD=2a$，$\angle BAD=60°$，G为BD的中点．

（I）求证：平面$BDE\perp$平面BCE；

（II）求平面CGE与平面$ADEF$所成锐二面角的余弦值．



（第 18 题图）

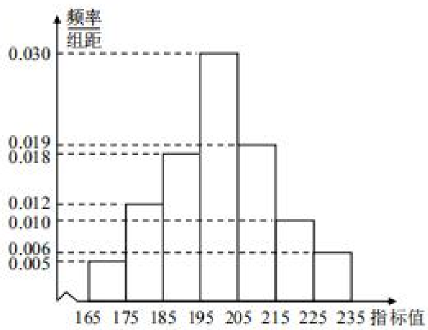
19.（12 分）为加强对企业产品质量的管理，市质监局到区机械厂抽查机器零件的质量，共抽取了 600 件螺帽，将它们的直径和螺纹距之比Z作为一项质量指标，由测量结果得如下频率分布直方图：

（I）求这 600 件螺帽质量指标值的样本平均数$\overline{x}$，样本方差s^2（在同一组数据中，用该区间的中点值作代表）；

（II）由频率分布直方图可以近似的认为，这种螺帽的质量指标值Z服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ近似为样本平均数$\overline{x}$，σ^2近似为样本方差s^2．

（i）利用该正态分布，求$P(185.03<Z<229.94)$；

（ii）现从该企业购买了 100 件这种螺帽，记X表示这 100 件螺帽中质量指标值位于区间(185.03, 229.94)的件数，利用（i）的结果，求$E(X)$．



附：$\sqrt{224}\approx 14.97$.

若 $Z\sim N(\mu,\sigma^2)$，则 $P(\mu-\sigma<Z<\mu+\sigma)=0.6826$，$P(\mu-2\sigma<Z<\mu+2\sigma)=0.9544$.

20.（12 分）已知 A,B 是 x 轴正半轴上两点（A 在 B 的左侧），且 $|AB|=a(a>0)$，过 A,B 作 x 轴的垂线，与抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 在第一象限分别交于 D,C 两点.

（I）若 $a=p$，点 A 与抛物线 $y^2=2px$ 的焦点重合，求直线 CD 的斜率；

（II）若 O 为坐标原点，记△OCD 的面积为 S_1，梯形 $ABCD$ 的面积为 S_2，求 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的取值范围.

21.（12 分）已知函数 $f(x)=(ax+1)e^x$，$a\in\mathbf{R}$.

（I）当 $a>0$ 时，证明：$f(x)+\dfrac{a}{e}>0$；

（II）当 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时，如果 $x_1\neq x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，证明：$x_1+x_2<2$.

选考题：共 10 分．请考生在第 22,23 题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题计分．作答时请写清题号．

22．[选修 4−4：坐标系与参数方程选讲]（10 分）

已知曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\cos\theta\\ y=\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），以平面直角坐标系的原点为极点，x 的非负半轴为极轴建立极坐标系.

（I）求曲线 C 的极坐标方程；

（II）P、Q 为曲线 C 上两点，若 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$，求 $\dfrac{|\overrightarrow{OP}|^2\cdot|\overrightarrow{OQ}|^2}{|\overrightarrow{OP}|^2+|\overrightarrow{OQ}|^2}$ 的值.

23．[选修 4−5：不等式选讲]（10 分）

已知函数 $f(x)=|x+2|-a|2x-1|$，$a\in\mathbf{R}$.

（I）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)\geq 0$ 的解集；

（II）若存在 $x\in\mathbf{R}$，使得不等式 $f(x)>a$ 成立，求 a 的取值范围.