2020 清华大学丘成桐数学英才班招生考试

复试 笔试一

2019 年 12 月 7 日

1. 证明: $\dfrac{2019!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+2019)}$ 可以分解成

$$\frac{A_1}{x+1}+\frac{A_2}{x+2}+\cdots+\frac{A_{2019}}{x+2019}$$

的形式, 其中 $A_1,\ldots,A_{2019}$ 都是整数.

2. 已知整系数多项式 $P(x)$, 整数 $a_1,\ldots,a_{2019}$ 满足 $P(a_1)=a_2$, $P(a_2)=a_3$, ..., $P(a_{2018})=a_{2019}$, $P(a_{2019})=a_1$.

求证: $a_1=a_2=\ldots=a_{2019}$.

3. 定义“数独矩阵”为 4×4 的矩阵, 它的每行, 每列, 每宫都是 $1,2,3,4$ 的某种排列 (其中宫是指从横竖中线分开形成的四个部分). 若矩阵 T 满足: 对于任何数独矩阵 A 都有 TA 也是一个数独矩阵, 则称 T 是“好的”.

构造尽量多的好矩阵并说明理由.

4. 定义两个数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ 满足

$$a_n=\int_{2019}^{2019+n}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x,\quad b_n=\int_{2019}^{2019+n}\frac{\sin x}{x\ln x}\mathrm{d}x$$

请问 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是否存在极限, 证明你的结论.

5. 设 $a > b > 0$, 定义 $\Gamma = \left\{(x, y) \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$

求证: 不存在第一象限 $(x > 0, y > 0)$ 里 Γ 上四个点使得这四点共圆.

6. 证明: 在任意 7 个无理数中都可以选出其中 4 个使得它们两两加起来还是无理数.

7. 请问: 四根柱子六个盘子的汉诺塔最少要移动几步?

8. 若 $\lambda_1, \ldots \lambda_{2019}$ 是一列互不相等的实数, $c_1, \ldots, c_{2019}$ 也是一列实数, 满足 $\lim\limits_{x \to +\infty} \sum\limits_{j=1}^{2019} c_j e^{i\lambda_j x} = 0$

求证: $c_1 = c_2 = \cdots = c_{2019} = 0$.